Opción A

Ejercicio nº 1 de la Opción A de Junio (modelo 2) de 2007

[2’5 puntos] Determina dos números reales positivos sabiendo que su suma es 10 y que el producto de sus cuadrados es máximo.

Solución

Es un problema de optimización, sean x e y los dos números
Relación $x + y = 10$.
Optimizar $P = x^2.y^2$
De $x + y = 10$, tengo $y = 10 – x$, luego $P = x^2.y^2 = P = x^2.(10 – x)^2 = x^2.(100 – 20x + x^2) = x^4 – 20x^3 + 100x^2$.
$P(x) = x^4 – 20x^3 + 100x^2$. Calculamos P’(x), resolvemos P’(x) = 0 que serán los posibles máximos o mínimos (con P’’(x) veremos si es máximo o mínimo).
$P(x) = x^4 – 20x^3 + 100x^2$.
$P’(x) = 4x^3 – 60x^2 + 200x$.
$P’(x) = 0$, da $4x^3 – 60x^2 + 200x = 0 = x(4x^2 – 60x + 200) = 0$, de donde $x = 0$ y $4x^2 - 60x + 200 =0$. Simplificando $x^2 – 15x + 50 = 0$. Al resolverla sale $x = 10$ y $x = 5$.
Los posibles máximos o mínimos son 0, 5 y 10.
$P’’(x) = 12x^2 – 120x + 200$
Como $P’’(0) = 200 > 0$, $x = 0$ es un mínimo relativo.
Como $P’’(10) = 200 > 0$, $x = 10$ es un mínimo relativo.
Como $P’’(5) = – 100 < 0$, $x = 5$ es un máximo relativo.
Los números son $x = 5$ e $y = 10 – 5 = 5$.

Ejercicio nº 2 de la Opción A de Junio (modelo 2) de 2007

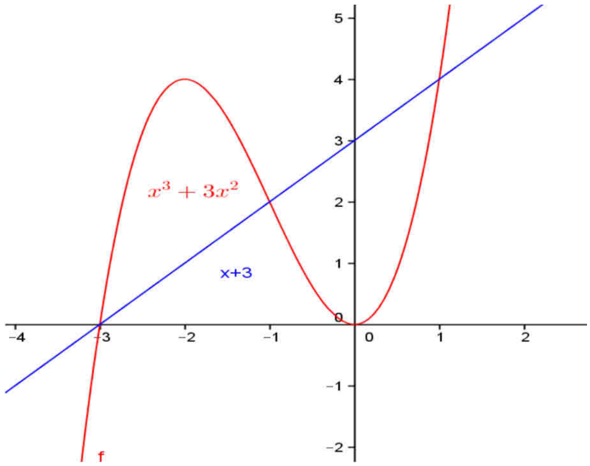
Sean $f : R \rightarrow R$ y $g : R \rightarrow R$ las funciones definidas mediante $f(x) = x^3 + 3x^2$ y $g(x) = x + 3$.
(a) [1’25 puntos] Esboza las gráficas de *f* y de *g* calculando sus puntos de corte.
(b) [1’25 puntos] Calcula el área de cada uno de los recintos limitados entre las gráficas de f y g.

Solución

(a)
$f(x) = x^3 + 3x^2$ y $g(x) = x + 3$.
$g(x) = x + 3$ es una recta y con dos puntos es suficiente para dibujarla
Para $x = 0$, $g(0) = 3$. Punto (0,3)
Para $g(x) = 0$, $x + 3= 0$, de donde $x = - 3$. Punto (- 3,0)

$f(x) = x^3 + 3x^2$ es un cúbica.
Cortes $f(0) = 0$. Punto (0,0)
Para $f(x) = 0$, $x^3 + 3x^2 = 0 = x^2(x + 3x)$, de donde $x = 0$ (doble) y $x = - 3$.. Puntos (- 3,0) y (0,0)
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x^3 + 3x^2) = \lim_{x\to-\infty} (x^3) = - \infty$. Es decir cuando x es muy grande negativo, f(x) es muy grande negativo.
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x^3 + 3x^2) = \lim_{x\to+\infty} (x^3) = + \infty$. Es decir cuando x es muy grande positivo, f(x) es muy grande positivo.
Las soluciones de $f’(x) = 0$ son los extremos relativos.
$f(x) = x^3 + 3x^2$.
$f’(x) = 3x^2 + 6x = 0 = x(3x + 6)$, de donde $x = 0$ y $x = - 2$ son los extremos relativos.
$f’’(x) = 6x + 6$
Como $f ‘’(0) = 6 > 0$, $x = 0$ es un mínimo relativo que vale $f(0) = 0$.
Como $f ‘’(-2) = -6 < 0$, $x = -2$ es un máximo relativo que vale $f(-2) = 4$.

Un esbozo de las gráficas es (en azul la recta g(x) y en rojo la cúbica f(x))



(b)
f(x) = $x^3 + 3x^2$ y g(x) = x + 3.
Para hallar el área encerrada entre las dos funciones tenemos que ver los puntos de corte, para lo cual igualamos las funciones.
f(x) = g(x), $x^3 + 3x^2 = x + 3$, $x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$.
Por Ruffini se ve que x = 1 es una solución, luego $x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0 = (x - 1)(x^2 + 4x + 3)$.
Resolviendo $x^2 + 4x + 3 = 0$ obtenemos x = - 3 y x = -1, luego f y g se cortan en -3, -1 y 1.

Área = $\int_{-3}^{-1}(f(x)-g(x))dx + \int_{-1}^{1}(g(x)-f(x))dx =$

$= \int_{-3}^{-1}(x^3 + 3x^2 - x - 3)dx + \int_{-1}^{1}(-x^3 - 3x^2 + x + 3)dx =$

$= \left[\frac{x^4}{4}+x^3-\frac{x^2}{2}-3x\right]_{-3}^{-1} + \left[-\frac{x^4}{4}-x^3+\frac{x^2}{2}+3x\right]_{-1}^{1} =$

= [(1/4 – 1 – 1/2 + 3) – (81/4 – 27 – 9/2 + 9)] + [(-1/4 - 1 +1/2 + 3) – (-1/4 + 1 +1/2 – 3)] = 4 + 4 = 8 u^2

Ejercicio nº 3 de la Opción A de Junio (modelo 2) de 2007

Considera la matriz A = $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$.

(a) [1 punto] Determina la matriz B = $A^2 - 2A$
(b) [0'75 puntos] Determina los valores de λ para los que la matriz B tiene inversa.
(c) [0'75 puntos] Calcula B^{-1} para λ = 1

Solución

(a)
A = $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$

$B = A^2 - 2A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1-\lambda \\ 1+\lambda & -1+\lambda^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1-\lambda \\ -1+\lambda & \lambda^2-2\lambda-1 \end{pmatrix}$

(b)
B tiene inversa si det(B) ≠ 0

$\det(B) = |B| = \begin{vmatrix} -2 & 1-\lambda \\ -1+\lambda & \lambda^2-2\lambda-1 \end{vmatrix} = -2\lambda^2 + 4\lambda + 2 - (1 - \lambda)(-1 + \lambda) = -\lambda^2 + 2\lambda + 3$

Resolviendo $-\lambda^2 + 2\lambda + 3 = 0$ obtenemos λ = -1 y λ = 3, por tanto si λ ≠ -1 y λ ≠ 3 la matriz B tiene inversa.
(c)
B^{-1} con λ = 1; B^{-1} = (1/|B|).Adj(B^t); Con λ = 1, B = $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$; det(B) = 4; B^t = $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$;

Adj(B^t) = $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$; B^{-1} = (1/|B|).Adj(B^t) = $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$

Ejercicio nº 4 de la Opción A de Junio (modelo 2) de 2007

Considera los planos de ecuaciones x – y + z = 0   y   x + y – z = 2.
(a) [1 punto] Determina la recta que pasa por el punto A(1,2,3) y no corta a ninguno de los planos dados.
(b) [1'5 puntos] Determina los puntos que equidistan de A(1,2,3) y B(2,1,0) y pertenecen a la recta intersección de los planos dados.

Solución

(a)

Plano x – y + z = 0, vector normal **n** = (1,-1,1)

Plano y x + y – z = 2, vector normal **n’** = (1,1,-1)

Como los vectores normales **n** y **n’** no son proporcionales, los planos son secantes y se cortan en una recta r de ecuación $r \equiv \begin{cases} x-y+z=0 \\ x+y-z=2 \end{cases}$.

Como me piden una recta que no corte a ninguno de los dos planos lo que me están pidiendo es una recta “s” paralela a la recta “r”, luego me sirve como vector director el de la recta “r” que es el producto vectorial de **n** con **n’**.

Recta “s”, punto el A(1,2,3), vector **u** = **n** x **n’** = $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ = **i**(1 – 1) – **j**(-2) + **k**(2) = (0,2,2)

La recta “s” en paramétricas es $\begin{cases} x=1 \\ y=2+2t \\ z=3+2t \end{cases}$

(b)

Los planos x – y + z = 0 y x + y – z = 2, son secantes y ya sabemos que se cortan en la recta r de ecuación $r \equiv \begin{cases} x-y+z=0 \\ x+y-z=2 \end{cases}$, que tenía de vector director **u** = **n** x **n’** = (0,2,2).

Un punto E de “r” lo obtenemos tomando z = 0, con lo cual resolviendo el sistema de la recta “r” obtenemos x = y = 1. El punto E es E(1,10)

Ponemos la recta “r” en paramétricas para tomar un punto genérico C de la recta “r”

Recta “r” en paramétricas $r \equiv \begin{cases} x=1 \\ y=1+2t \\ z=2t \end{cases}$. El punto genérico C de “r” es C(1, 1+2t, 2t).

Como dicen que los puntos A(1,2,3) y B(2,1,0) equidistan de la recta “r”, equidistan de un punto genérico suyo, el C, es decir d(A,C) = d(B,C) (las distancias son iguales)

d(A,C) = | **AC**| = $\sqrt{0^2+(-1+2t)^2+(-3+2t)^2}$

AC = (1 - 1, 1 + 2t -2, 2t – 3) = (0, -1+2t, -3+2t)

d(B,C) = | **BC**| = $\sqrt{1^2+(2t)^2+(2t)^2}$

BC = (1 - 2, 1 + 2t -1, 2t – 0) = (1, 2t, 2t)

Igualando tenemos $\sqrt{0^2+(-1+2t)^2+(-3+2t)^2}$ = $\sqrt{1^2+(2t)^2+(2t)^2}$. Elevando al cuadrado y simplificando obtenemos 16t = 9, de donde t = 9/16, y los puntos de la recta “r” que equidistan de A y B es solo uno el C(1,1+2(9/16), 2(9/16)) = C(1, 17/8, 9/8).

Opción B

Ejercicio nº 1 de la Opción B de Junio (modelo 2) de 2007

[2’5 puntos] Sea f : R → R la función definida por f(x) = $2x^3 + 12x^2 + ax + b$. Determina a y b sabiendo que la recta tangente a la gráfica de f en su punto de inflexión es la recta y = 2x + 3.

Solución

f(x) = $2x^3 + 12x^2 + ax + b$

Los puntos de inflexión verifican f’’(x) = 0

f’(x) = $6x^2 + 24x + a$

f’’(x) = 12x + 24, de f’’(x) = 0 obtenemos x = - 2 que es el punto de inflexión.

La recta tangente en x = -2 es y – f(-2) = f’(-2)(x + 2)

También me dicen que la recta tangente en x = - 2 es y = 2x + 3, por tanto f’(-2) = 2.

De f’(-2) = 2, tengo 2 = $6(-2)^2$ + 24(-2) + a. Operando obtenemos a = 26.

De a recta tangente y – f(-2) = f’(-2)(x + 2), tenemos y = f(-2) +2(x+2) = 2x + (4 + f(-2)). Igualando esta ecuación con la recta tangente y = 2x + 3 tenemos: 3 = 4 + f(-2), de donde f(-2) = -1.

De f(-2) = - 1, tengo -1 = $2(-2)^3 + 12(-2)^2 + (26)(-2) + b$. Operando obtenemos b = 19.

La función es $f(x) = 2x^3 + 12x^2 + 26x + 19$.

Ejercicio nº 2 de la Opción B de Junio (modelo 2) de 2007

[2'5 puntos] Dada la función $f : R \to R$ definida por $f(x) = Ln(1 + x^2)$, halla la primitiva de f cuya gráfica pasa por el origen de coordenadas. (Ln denota la función logaritmo neperiano).

Solución

Una primitiva de f(x) es F(x) = $\int f(x)dx + K$

I = $\int f(x)dx = \int Ln(1+x^2)dx$ que es una integral por partes ($\int udv = uv - \int vdu$)

u = $Ln(1 + x^2)$, de donde du = $(2x)/(1 + x^2)$

dv = dx, de donde v = $\int dx = x$

I = $\int Ln(1+x^2)dx$ = $x.Ln(1 + x^2) - \int x.\frac{2x}{1+x^2}dx$ = $x.Ln(1 + x^2) - 2\int \frac{x^2}{1+x^2}dx$ = $x.Ln(1 + x^2) - 2I_1$.

$I_1 = \int \frac{x^2}{1+x^2}dx$, aunque sencilla es una integral racional (hay que dividir) o poner el numerador en la forma $x^2 = x^2 + 1 - 1$.

$I_1 = \int \frac{x^2}{1+x^2}dx = \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx = \left\{\begin{matrix}\text{diviendo por}\\ 1+x^2\end{matrix}\right\} = \int \left(1 + \frac{-1}{1+x^2}\right)dx = x - artag(x)$

I = $x.Ln(1 + x^2) - 2I_1 = x.Ln(1 + x^2) - 2(x - artag(x))$

F(x) = $\int f(x)dx + K = x.Ln(1 + x^2) - 2(x - artag(x)) + K$.

Como nos dicen que la primitiva F(x) pasa por (0,0) tenemos F(0) = 0.

De F(0) = 0, tenemos 0 = 0.Ln(1 + 0) – 2(0 – artag(0)) + K = 0 + K, de donde K = 0 y la primitiva pedida es $F(x) = x.Ln(1 + x^2) - 2(x - artag(x))$

Ejercicio nº 3 de la Opción B de Junio (modelo 2) de 2007

(a) [1 punto] Calcula la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) [1'5 puntos] Escribe en forma matricial el siguiente sistema y resuélvelo usando la matriz A^{-1} hallada en el apartado anterior.

$$\left.\begin{array}{l} x+y=1 \\ y+z=-2 \\ x+z=3 \end{array}\right\}$$

Solución

(a)

$A^{-1} = (1/|A|).Adj(A^t)$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; det(A) = $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}_{3^aF+1^aF(-1)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$ = 1(1+1) = 2

$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $A^{-1} = (1/|A|).Adj(A^t) = (1/2)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(b)

El sistema $\left.\begin{array}{l} x+y=1 \\ y+z=-2 \\ x+z=3 \end{array}\right\}$ en forma matricial es A.X = B, con $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Como existe A^{-1}, multiplicando por la izquierda A.X = B por A^{-1}, tenemos

$A^{-1}(A.X) = A^{-1}.B$

$$X = A^{-1}.B = (1/2)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = (1/2)\begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$, es decir la solución es (x,y,z) =(3,-2,0)

Ejercicio nº 4 de la Opción B de Junio (modelo 2) de 2007

Considera los puntos A(0,3,-1) y B(0,1,5).

(a) [1'25 puntos] Calcula los valores de x sabiendo que el triángulo ABC de vértices A, B y C(x,4,3) tiene un ángulo recto en C.

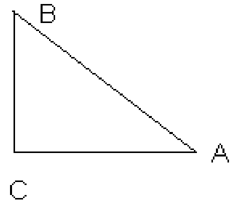
(b) [1'25 puntos] Halla la ecuación del plano que pasa por los puntos (0,1,5) y (3,4,3) y es paralelo a la recta definida por las ecuaciones $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$.

Solución

(a)

A(0,3,-1) , B(0,1,5) y C(x,4,3)

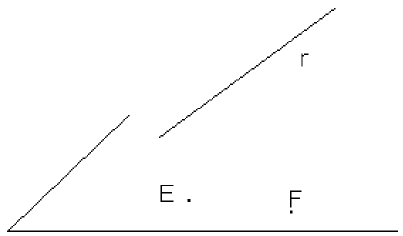
Si el triángulo es rectángulo en C el producto escalar **CA•CB** es cero



CA = (- x, -1, -4); **CB** = (- x, -3, 2)

CA•CB = $x^2 + 3 - 8 = 0 \rightarrow x^2 = 5$, de donde x = $\pm\sqrt{5}$. Hay dos soluciones para "x".

(b)



Para un plano necesito un punto E(0,1,5) y dos vectores independientes el **EF** = (3-0, 4-1, 3-5) = (3,3,-2) y el director de la recta "r", que es **u** = **n** x **n'** = $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ = **i**(– 1) – **j**(-2) + **k**(3) = (-1,2,3)

Siendo **n** y **n'** los vectores normales de cada uno de los planos que determina la recta "r".

El plano pedido es **0 = det**(**x** – **e**, **EF**, **u**) = $\begin{vmatrix} x-0 & y-1 & z-5 \\ 3 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ = x(9+4) – (y-1)(9-2) + (z-5)(6+3) =

= 13x – 7y + 9z – 38 = 0.